総合職試験・一般職試験(大卒程度試験)・
障害者(係員級)採用試験(大卒程度試験)共通　数学

以下の 4 つの問題のうちから 3 つを選択して, 解答用紙に解答を記入せよ. なお解答に当たっては, 考え方や途中の計算などもなるべく詳しく記し, 何らかの定理を用いた場合は, その名前や内容も明記すること.

以下, $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする.

問 1 A を 3 行 3 列からなる実数係数の行列として, 線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定義する. また

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと, f は

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_3, \quad f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3, \quad f(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2$$

を満たすとする. 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とするとき $f(\boldsymbol{v})$ を求めよ.

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ.

(3) A の固有値を全て求め, それぞれの固有ベクトルを一つ求めよ.

問 2

(1) $x > -1$ に対して $h(x) = \log(1+x)$ とおく. このとき $n = 1, 2, \ldots$ に対して $h^{(n)}(x)$ を求めよ. ただし, $\log$ は e を底とする対数を表すとする.

(2) f を開区間 $(-1, 1)$ 上の C^∞ 級関数とする. このとき $x \in (-1, 1)$, $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(xt)(1-t)^n dt$$

となることを示せ.

(3) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ のとき,

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

となることを示せ. (必要であれば次の不等式を用いよ: $0 \leq t \leq 1, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ のとき $|x| < 1 + xt$ となる.)

問 3 $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対して, 二項関係 $\sim$ を

$$(a,b) \sim (c,d) \iff b - a = d - c$$

で定める.

(1) 二項関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ.

(2) 同値関係 $\sim$ による $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の商集合を X とし, $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の同値類を $[(a,b)] \in X$ と表す. $[(a,b)], [(c,d)] \in X$ に対して, 二項関係 $\leq$ を

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \iff b - a \leq d - c$$

で定める. X における二項関係 $\leq$ は半順序関係であることを示せ.

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上単調減少な連続関数で,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

をみたすものとする. $F : \mathbb{R} \to X$ を $F(x) = [(x, f(x))]$ と定義したとき, F は全単射写像であることを示せ. ただし単調減少関数とは, 任意の $x \leq y$ に対して $f(x) \geq f(y)$ を満たす関数とする.

問 4 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \leq y\}$ として, D 上の一様分布を考える. $X : D \to \mathbb{R}$ を $X(x,y) = x$, $Y : D \to \mathbb{R}$ を $Y(x,y) = y$ とする.

(1) 確率変数 X の期待値を求めよ.

(2) 確率変数 X の分散を求めよ.

(3) 確率変数 X, Y の共分散を求めよ.