総合職試験　数学

以下の 3 つの問題のうちから 1 つを選択して，解答用紙に解答を記入せよ。なお解答に当たっては，考え方や途中の計算などもなるべく詳しく記し，何らかの定理を用いた場合には，その名前や内容も明記すること。

以下，$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合，$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合，$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする。

問 5　xy 平面上の 4 つの点 $A_1 = (1,1), A_2 = (-1,1), A_3 = (-1,-1), A_4 = (1,-1)$ を頂点とする四角形を A，4 つの点 $B_1 = (2,2), B_2 = (-2,2), B_3 = (-2,-2), B_4 = (2,-2)$ を頂点とする四角形を B とする。次の変換は図形 A, B の頂点の集合から頂点の集合への全単射を与える。

(a) 図形 A を原点を中心に反時計回りに 90 度回す。

(b) 図形 B を原点を中心に反時計回りに 90 度回す。

(c) 図形 A と B を同時に，直線 $y = x$ を軸にして裏返す。

(d) 図形 A と B を同時に，直線 $y = -x$ を軸にして裏返す。

これらの変換により生成される群を G とする。変換 (a),(b),(c),(d) を，簡単のため，それぞれ $a, b, c, d \in G$ と表す。このとき，$ab = ba,\ cd = dc,\ c^2 = d^2 = 1$ が成り立つ。

以下の問いに答えよ。

(1) $cd = a^2b^2$ を示せ。

(2) $cac = a^{-1}$ を示せ。

同様にして，$dad = a^{-1},\ cbc = b^{-1},\ dbd = b^{-1}$ が成り立つことが確認できる。以下，これらの等式を使ってよいこととする。

(3) G の元 x を a, b, c, d を使って表したとき，c と d およびその逆元の数の総和が偶数であれば，$x = a^m b^n$（$m, n \in \mathbb{Z}$）と表せることを示せ。また，c と d およびその逆元の数の総和が奇数であれば，$x = ca^m b^n$（$m, n \in \mathbb{Z}$）と表せることを示せ。

(4) G の位数を求めよ。

問 6　$x^2+2y^2+3z^2=1$ で定まる $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を S とする。

(1) S 上の点 $(x,y,z)=(a,b,c)$ における S の接平面の式を求めよ。

(2) S 上の関数 $f:S\to\mathbb{R}$ を $f(x,y,z)=x+y+z$ で定める。f の最大値および最小値を求めよ。

(3) (2) の関数 f について，$p\in f(S)$ を f の正則値とする。$f^{-1}(p)$ が S^1 と同相であることを示せ。ここで $S^1=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$ であり，S^1 の位相は平面 $\mathbb{R}^2$ の通常の位相から定まる相対位相とする。

(4) S 上の関数 $g:S\to\mathbb{R}$ を $g(x,y,z)=x^2$ で定める。各 $q\in\mathbb{R}$ について，$g^{-1}(q)$ が空集合でないとき，その整係数ホモロジー群を求めよ。ホモロジー群の計算は省略してよい。

問 7　$a\in\mathbb{R}$，$n\in\mathbb{N}$ とする。$f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ を，$\lim_{t\to\infty}f(t)=0$ をみたす C^1 級の減少関数とし，$g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ を，

$$\left\{\int_a^x g(t)dt \;\middle|\; a<x<\infty\right\}\subset\mathbb{R}$$

が有界となる連続関数とする。$\{a_n\}$ を $a_n\geq a$ かつ $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ を満たす実数列とする。

(1) $c_n=\displaystyle\int_a^{a_n}|f'(t)|dt$ とおく。数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ。

(2) $f'(t)$ は $[a,\infty)$ 上で絶対可積分であることを示せ。

(3) $s_n=\displaystyle\int_a^{a_n}f(t)g(t)dt$ とおく。数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ。