総合職試験・一般職試験（大卒程度試験）・
障害者（係員級）採用試験（大卒程度試験）共通　数学

以下の4つの問題のうちから3つを選択して，解答用紙に解答を記入せよ。なお解答に当たっては，考え方や途中の計算などもなるべく詳しく記し，何らかの定理を用いた場合には，その名前や内容も明記すること。

以下，$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合，$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする。

問1　$\alpha, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ とし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & 3\alpha \\ 1 & \alpha \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

とする。

(1) $\mathbf{x}$ を変数とする連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解を求めよ。

(2) $\mathbf{y}$ を変数とする連立1次方程式 $AB\mathbf{y} = \mathbf{b}$ が解をもつための α の必要十分条件を求めよ。

問2　$\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f を $f(x) = e^x \sin x$ で定める。

(1) $f(x)$ の1次導関数 $f'(x)$ および2次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(2) $n \in \mathbb{N}$ について，$f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。数学的帰納法を使って証明を与えること。

(3) 閉区間 $[a, b]$ 上でテイラーの定理を用いることにより，等式

$$f(b) = \sum_{k=0}^{4m-1} c_k (b-a)^k + R_{4m}$$

が得られる。ここで c_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, 4m-1)$ は実数であり，R_{4m} は剰余項である。R_{4m} を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} R_{4m} = 0$ を示せ。

問３　写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を

$$f(n) = \begin{cases} 2n & (n\text{ は奇数}) \\ \dfrac{n}{2} & (n\text{ は偶数}) \end{cases}$$

で定める。 $n \in \mathbb{N}$ に対し，f の n 回の合成写像を f^n で表す。

(1) f は全射か，全射ではないかを答え，それを証明せよ。

(2) f は単射か，単射ではないかを答え，それを証明せよ。

(3) $A \subset \mathbb{N}$ を有限部分集合とする。命題

$$n > N \Longrightarrow f^n(A) \subset f^N(A) \cup f^{N+1}(A)$$

を真とする自然数 N が存在することを示せ。

(4) 次の命題を真とする自然数 N は存在しないことを示せ。

〈命題〉任意の有限部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ に対し，$n > N \Longrightarrow f^n(A) \subset f^N(A) \cup f^{N+1}(A)$ が成り立つ。

問４　正の実数 a および自然数 p に対し，確率密度関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} ax^{\frac{1}{p}}(1-x) & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0,\ x > 1) \end{cases}$$

で定める。$f(x)$ に従う確率変数を X とする。

(1) p を用いて a を表せ。

(2) X の期待値が $\dfrac{1}{3}$ よりも大きいことを示せ。

(3) X の分散を p を用いて表せ。

(4) X の期待値が $\dfrac{2}{5}$ 以上という条件下で p を動かしたときの，X の標準偏差の最大値を求めよ。