

◎以下の3つの問題のうちから1つを選択して、解答用紙に解答を記入せよ。なお解答に当たっては、考え方や途中の計算などもなるべく詳しく記し、何らかの定理を用いた場合には、その名前や内容も明記すること。

以下、 \mathbb{N} を自然数全体の集合、 \mathbb{Z} を整数全体の集合、 \mathbb{R} を実数全体の集合とする。

問5 G を有限集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ の対称群とし、 H を

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right)$$

で生成される G の部分群とする。

- (1) $\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$ は H の元ではないことを示せ。
- (2) H は G の正規部分群であることを示せ。また、 H の G における指数を求めよ。
- (3) 全射準同型 $H \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が存在するかしないかを答え、それを証明せよ。

問6 $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{Z} \text{ または } x_2 \in \mathbb{Z}\}$ とする。 L 上の2点 x, y に対し、 $d(x, y)$ を x と y を結ぶ L 上の折れ線の長さの最小値とする。ここで折れ線の長さは \mathbb{R}^2 上のユークリッド距離から定まるものとする。0 以上の実数 r に対し $B(x, r) = \{y \in L \mid d(x, y) \leq r\}$ とし、 $a = (0, \frac{1}{2})$, $b = (1, \frac{1}{2})$ とする。

- (1) $d: L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ は L 上の距離関数であることを示せ。
- (2) $0 \leq r \leq 2$ とする。和集合 $B_r = B(a, r) \cup B(b, r)$ のオイラー標数 $\chi(B_r)$ および1次元整係数ホモロジー群 $H_1(B_r; \mathbb{Z})$ を求めよ。
- (3) $0 \leq r \leq 2$ とする。 L の部分集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の各点 z に対し、 z を中心とする平面 \mathbb{R}^2 の π 回転を $R_\pi(z)$ で表すことにする。(2) における B_r 上の2点 x, y に対し、有限回の π 回転 $R_\pi(z_1), R_\pi(z_2), \dots, R_\pi(z_m)$ の合成により x が y に移るとき、 x と y は同値であると定義し、この同値関係による B_r の商空間を C_r とする。 C_r が $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ と同相となるための r の必要十分条件を求めよ。ここで B_r の位相は距離関数 d から定まる位相とし、 S^1 の位相は \mathbb{R}^2 のユークリッド距離から定まる通常の位相から誘導される位相とする。

問7 自然数 a, b, n に対し, 実数値関数 $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を $f_n(x) = n^a x e^{-n^b x^2}$ で定める。

- (1) 各 $x \in [0, 1]$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ となることを示せ。
- (2) 関数列 $\{g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ がある関数 $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ に一様収束することの定義を書け。
- (3) 関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がある関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ に一様収束するための a, b の必要十分条件を求めよ。一様収束する場合, 一様収束しない場合のいずれについても, (2) で答えた定義にしたがって証明を与えること。