

総合職試験・一般職試験（大卒程度試験）・
障害者（係員級）採用試験（大卒程度試験）共通 数学

◎以下の4つの問題のうちから3つを選択して、解答用紙に解答を記入せよ。なお解答に当たっては、考え方や途中の計算などもなるべく詳しく記し、何らかの定理を用いた場合には、その名前や内容も明記すること。

問1 α を実数とし、 $A = \begin{pmatrix} 7 & -\alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$ とする。以下、固有値が実数であるとき、これを実固有値と呼ぶ。

- (1) $\alpha = 2$ のとき、行列 A の固有値と、それぞれの固有値について、それに属する固有ベクトルを1つ求めよ。
- (2) 行列 A が実固有値をもつための α の必要十分条件を求めよ。
- (3) 行列 A の固有値がただ1つのとき、その固有空間を求めよ。
- (4) 4次正方行列 $\begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$ が2つの異なる実固有値をもつための α の必要十分条件を求めよ。また、そのときの各固有値についての固有空間の次元を求めよ。

問2 \mathbb{R} を実数全体の集合とする。 \mathbb{R} 上の実数値関数 f を $f(x) = xe^{-x^2}$ で定める。実数 t に対し、 $g_t(x) = \cos^{-1}(tx)$ とする。ここで \cos^{-1} は \cos の逆関数を表し、その値域は $[0, \pi] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ とする。 f と g_t の合成関数 h_t を $h_t(x) = g_t(f(x))$ で定める。

- (1) 関数 $f(x)$ の最大値および最小値が存在するならば、それを求めよ。実際に最大および最小であることを示すこと。存在しない場合は、存在しないことを示せ。
- (2) 合成関数 $h_t(x)$ が \mathbb{R} 上の実数値関数として正しく定義されるための t の必要十分条件を求めよ。

以下、合成関数 $h_t(x)$ が正しく定義されているとする。

- (3) $h_t(x)$ が C^1 -級関数となるための t の必要十分条件を求めよ。
- (4) (3) の条件のもとで、 $x = a$ における h_t の微分係数 $h'_t(a)$ が正となるための a の必要十分条件を求めよ。

問3 \mathbb{N} を自然数全体の集合とする。集合 $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の元 (x_1, x_2, x_3) および (y_1, y_2, y_3) に対し、同値関係 \sim を

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \iff \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \text{ かつ } \frac{x_2}{x_3} = \frac{y_2}{y_3}$$

で定める。 X を同値関係 \sim による商集合 $X = \mathbb{N}^3 / \sim$ とし、 (x_1, x_2, x_3) の同値類を $[x_1, x_2, x_3]$ と表す。 Q を正の有理数全体の集合とする。

(1) 写像 $f: X \rightarrow Q$ を

$$f([x_1, x_2, x_3]) = \frac{x_1 x_3}{x_2^2}$$

で定める。写像 f が正しく定義されていることを示せ。

(2) f が全射であることを示せ。

(3) $f^{-1}(1)$ が無限集合であることを示せ。

(4) m, n を自然数とし、写像 $g_{m,n}: X \rightarrow Q \times Q$ を

$$g_{m,n}([x_1, x_2, x_3]) = \left(\frac{x_1 x_3}{x_2^2}, \frac{x_1^m x_3^n}{x_2^{m+n}} \right)$$

で定める。 $g_{m,n}$ が全射となるための m, n の必要十分条件を求めよ。

問4 α を $0 \leq \alpha \leq 10$ を満たす整数とする。計算ドリルの問題を、5人の学生が1人ずつ順番に1ページずつ解く。1人目は5点で、かかった時間は2分、2人目は7点で、かかった時間は3分、3人目は3点で、かかった時間は5分、4人目は9点で、かかった時間は6分、5人目は α 点で、かかった時間は4分であった。

(1) 最初の4人の点数の平均、分散、標準偏差を求めよ。

(2) 5人の点数の分散が5以下となるための α の必要十分条件を求めよ。

(3) 5人の点数とかかった時間の相関係数の、 α を動かしたときの最大値を求めよ。