総合職試験・一般職試験(大卒程度試験)・障害者(係員級)採用試験(大卒程度試験)共通　物理学

問題 1～問題 4 の中から，3 問選択して解答しなさい．

問題 1

半径 R の一様密度の剛体円板がある．円板の質量は M で，厚さは無視できる．図 1 に示したように，この円板の中心 G から距離 ℓ の点 O を支点とする振り子がある．鉛直下向きに x 軸をとり，水平方向に y 軸と z 軸をとる．z 軸は紙面に垂直で，紙面の裏から表への向きを z 軸の正の向きとする．円板は常に x-y 平面上にあり，z 軸に平行で O を通る固定軸のまわりになめらかに回転できる．O と G を結ぶ線分と x 軸がなす角を ϕ とする．また，重力加速度を g とする．以下の問に答えよ．

(1) 円板に垂直で円板の中心 G を通る軸のまわりの円板の慣性モーメント I_0 は，G を原点とする直交座標 x' および y' を用いると次式で表される．

$$I_0 = \rho \int_S dx'dy' \left({x'}^2 + {y'}^2 \right) \tag{i}$$

ただし，ρ は円板の密度で，積分は円板を S として S 全体にわたる面積分である．積分を実行して，I_0 を求めよ．

(2) 円板に垂直で O を通る軸のまわりの円板の慣性モーメント I を求めよ．

(3) 円板が $\phi > 0$ の位置で傾いた状態で静止しているとき，円板に作用する重力による支点 O のまわりの力のモーメント $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を求めよ．

(4) 円板を $\phi = \phi_0$ の位置に傾けた状態で静止させ，静かに離した．$|\phi_0| \ll 1$ のとき，ϕ の時間変化は単振動で近似できる．この単振動の周期 T を求めよ．

(5) T が最小となる ℓ を求めよ．

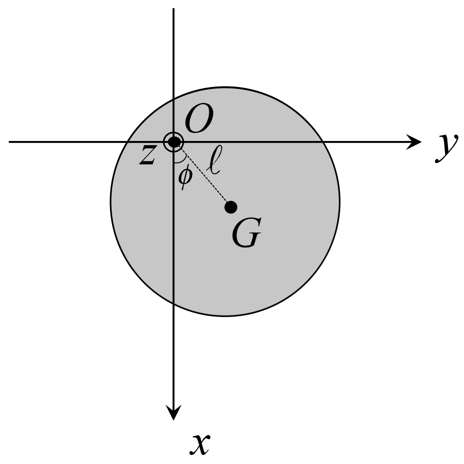

図 1

問題 2

x-y 平面上に原点を中心として半径 a の円形回路が置かれている．この円形回路に，z 軸上の z 座標が正の点から見て，反時計回りに定常電流 I を流す．この円形回路が磁束密度 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ の一様な磁場下にあるとき，円形回路に作用する力を考える．ただし，円形回路は空間内で自由に動けるとする．回路上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると，回路上の 2 点 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ の間にある回路の微小部分に作用する力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ は次式で与えられる．

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} \tag{i}$$

以下の問に答えよ．

(1) $0 \leq \phi \leq 2\pi$ として，$\boldsymbol{r} = (a\cos\phi, a\sin\phi, 0)$ とおくと，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = aI\,(B_z\cos\phi, B_z\sin\phi, -B_x\cos\phi - B_y\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi \tag{ii}$$

と書けることを示せ．

(2) 回路全体に作用する力 $\boldsymbol{F}$ を求め，$\boldsymbol{F} = 0$ となることを示せ．

(3) 回路全体に作用する原点のまわりの力のモーメント $\boldsymbol{N}$ が次式で与えられることを示せ．

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{iii}$$

ただし，$\boldsymbol{m}$ は磁気モーメントを表し，$\boldsymbol{e}_z$ を z 軸方向の単位ベクトルとして $\boldsymbol{m} = I\pi a^2\boldsymbol{e}_z$ である．

(4) 磁性体の磁化は，単位体積中の磁気モーメントの和で定義される．通常の常磁性体では，外部磁場の強さに比例して磁化が生じ，外部磁場と磁化の方向は一致する．ところが，磁化の方向が外部磁場の方向からずれるような磁性体が存在する．磁性体がこのような性質を持つか否かを調べるには，どのような実験を行えばよいか．前問の結果を踏まえて，簡単に説明せよ．

問題 3

一様な磁場中におかれたスピン 1/2 の電子を考える．ハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H = 2\mu_B \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} \tag{i}$$

ただし，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，$\mu_B = e\hbar/(2m)$ はボーア磁子で，e は電荷素量，m は電子の質量である．また，h をプランク定数として $\hbar = h/(2\pi)$ である．スピン角運動量は $\hbar\boldsymbol{S} = \hbar(S_x, S_y, S_z)$ で表される．z 軸方向をスピンの量子化軸にとると，スピンがとりうる状態は，z 軸に平行な状態または反平行な状態である．これらの状態をそれぞれ $|\uparrow\rangle$，$|\downarrow\rangle$ と書いて，2 成分のベクトルを用いて次式のように表す．

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{ii}$$

これらの基底を用いると，スピン演算子は

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{iii}$$

と書ける．以下の問に答えよ．

(1) $[S_x, S_y] = \mathrm{i}S_z$ となることを示せ．

(2) $\boldsymbol{B} = (B, 0, 0)$ のとき，エネルギー固有値を求めよ．

(3) $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ のとき，基底状態エネルギーはどのように書けるか．結果のみ記述せよ．

(4) $|\boldsymbol{B}| \neq 0$ でスピンの初期状態が基底状態にない場合，スピンの状態の時間変化を考え，時刻 t における状態ベクトルを $|\psi(t)\rangle$ と書く．スピンの期待値は，$\langle\psi(t)|\boldsymbol{S}|\psi(t)\rangle$ と書ける．$|\psi(t)\rangle$ の時間発展が，時間に依存するシュレーディンガー方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \tag{iv}$$

によって記述されることを用いて，$\langle\psi(t)|\boldsymbol{S}|\psi(t)\rangle$ が従う運動方程式を導出せよ．

(5) スピンの期待値は，ある種の周期的運動を行う．どのような周期的運動かを説明せよ．また，この周期的運動の周期を書け．(周期については結果のみで良い．)

問題 4

温度 T，圧力 P のもとでの物質量 n の流体のギブスの自由エネルギーは $G = G(T, P, n)$ で与えられる．流体の単位物質量あたりの化学ポテンシャルを $\overline{\mu}$ とすると，熱力学第 1 法則は次式のように書ける．

$$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}P + \overline{\mu}\mathrm{d}n \tag{i}$$

ここで S は流体のエントロピー，V は流体の体積である．以下の問に答えよ．

(1) この流体のある部分系の物質量が $0 < x < 1$ として xn であるとき，G について次の関係式が成り立つ．

$$xG(T, P, n) = G(T, P, xn) \tag{ii}$$

なぜこのような関係式が成り立つかを，系の示量変数および示強変数に着目して簡単に説明せよ．

(2) 式 (ii) を x で微分することにより，次式が得られることを示せ．

$$G(T, P, n) = n\overline{\mu} \tag{iii}$$

(3) 前問の結果と熱力学第 1 法則から，次式が得られることを示せ．

$$S\mathrm{d}T - V\mathrm{d}P + n\mathrm{d}\overline{\mu} = 0 \tag{iv}$$

(4) 圧力 P と温度 T において，1 成分系の液相と気相が共存しているとき，n_ℓ，n_g をそれぞれ液相，気相の物質量とすると，系全体のギブスの自由エネルギーは，$G = G(T, P, n_\ell, n_g)$ と書ける．$n_\ell + n_g$ が一定であることから，次式が熱平衡条件となることを示せ．

$$\overline{\mu}_\ell(P, T) = \overline{\mu}_g(P, T) \tag{v}$$

(5) 液体から気体へ相転移する際の潜熱を単位物質量あたり q，体積変化を単位物質量あたり v とする．気相と液相が共存する温度を T，圧力を P とするとき，関係式

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{q}{Tv} \tag{vi}$$

が成り立つことを示せ．また，q の符号が正か負かを理由とともに述べ，流体の圧力を減少させたとき沸点が上昇するか否かを説明せよ．